

ЛЕКЦИЯ № 17

Нелинейный резонанс.

Учет ангармонизмов колебаний приводит к существенным изменениям в их резонансных свойствах. Поскольку в нелинейных системах отсутствует принцип суперпозиции, то одновременное воздействие различных сил неаддитивно. Поэтому рассмотрим наиболее интересный для физических приложений случай воздействия на ангармонический осциллятор гармонической внешней силы. В качестве модели возьмем осциллятор Дюффинга с четверным ангармонизмом. Соответствующее динамическое уравнение обобщает уравнения (10.10) и (16.6):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = f \cos(\omega t) / m = F \cos(\omega t). \quad (17.1)$$

Несмотря на кажущуюся простоту уравнения (17.1) его полное решение представляет значительную сложность. Поскольку соответствующая динамическая система неконсервативна, то в ней отсутствуют интегралы движения. Это приводит к сложной и даже хаотической динамике этой системы. Однако при малых уровнях возбуждения довольно просто получить частные одночастотные решения, играющие основную роль в физических приложениях этого уравнения. Воспользуемся резонансным приближением и рассмотрим решения вида $x = a \cos(\omega t)$. Для них из (17.1) следует

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 - \frac{F}{a}. \quad (17.2)$$

Построение резонансной зависимости $a = a(\omega)$ проиллюстрировано на Рис.17.1.

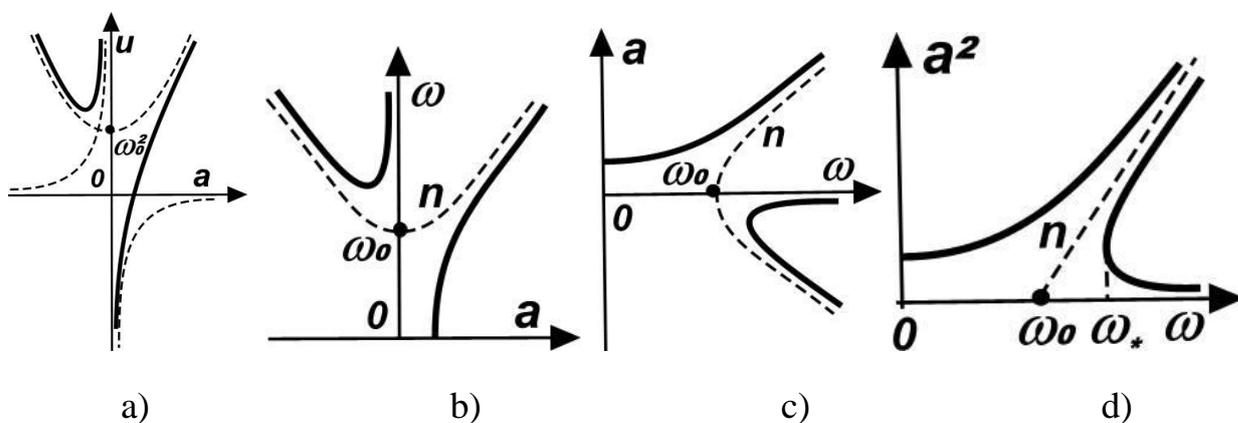


Рис.17.1

Из Рис.17.1 видно, что учет нелинейности ограничивает резонансный рост амплитуды колебания со временем. Кроме того, возникает критическое значение частоты внешней силы ω_* такое, что при $\omega > \omega_* = \sqrt{\omega_0^2 + cF^{2/3}\varepsilon^{1/3}}$ бифуркационным образом возникают два новых решения. При уменьшении внешней силы $F \rightarrow 0$ резонансные кривые «прижимаются» к штриховой линии n , которая соответствует свободным нелинейным колебаниям, рассмотренным ранее. Встает вопрос об устойчивости различных ветвей решения и место найденного решения среди других решений.

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим нелинейное вращение магнитного момента (см. (16.24)) при учете внешнего циркулярного поля (см.(10.18)), ограничившись в уравнении первым нелинейным слагаемым:

$$i\dot{\psi} - \omega_0\psi - \varepsilon|\psi|^2\psi + f \exp(-i\omega t) = 0. \quad (17.3)$$

Это уравнение допускает частное решение, аналогичное вышеприведенному $\psi = a \exp(-i\omega t)$, зависимость которого от амплитуду близка к полученной выше для маятника Дюффинга (17.2):

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon a^2 - f/a, \quad (17.3)$$

но определена для всех частот (Рис.17.2). Зависимость на Рис.17.2а качественно совпадает с зависимостью на Рис.17.1d для исходного нелинейного осциллятора.

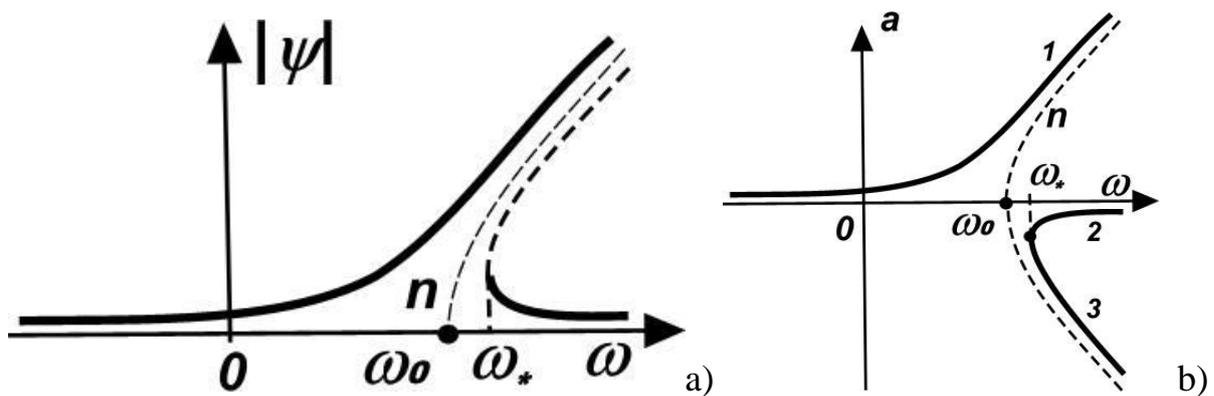


Рис.17.2

Удобство рассмотренной модели заключается в том, что она обладает интегралом движения и интегрируется полностью, т.е. дает возможность исследовать все решения общего вида. При замене $\psi = \varphi \exp(-i\omega t)$ (переход во вращающуюся систему отсчета) для комплексной функции $\varphi(x,t)$

получаем нелинейное дифференциальное уравнение, но с постоянными коэффициентами:

$$i\dot{\varphi} - (\omega_0 - \omega)\varphi - \varepsilon|\varphi|^2\varphi + f = 0. \quad (17.4)$$

Представив решение в виде $\varphi = a \exp(i\delta)$, получаем для вещественных функций a и δ систему двух уравнений первого порядка:

$$\dot{a} = f \sin \delta, \quad (17.5)$$

$$\dot{\delta} = (\omega - \omega_0) - \varepsilon a^2 + \frac{f}{a} \cos \delta. \quad (17.6)$$

Это – динамическая система с одной степенью свободы и одним интегралом движения типа «энергии», который имеет вид:

$$E = (\omega_0 - \omega)|\varphi|^2 + \frac{\varepsilon}{2}|\varphi|^4 + f(\varphi + \bar{\varphi}) = (\omega_0 - \omega)a^2 + \frac{\varepsilon}{2}a^4 + 2f a \cos \delta. \quad (17.7)$$

Если выразить из (17.7) $\cos \delta$ через амплитуду a и подставить его в уравнение (17.5), то получится уравнение первого порядка для a^2 , которое сводится к эллиптическому интегралу и дает общее решение в терминах эллиптических функций Якоби. Но мы исследуем полученную систему качественно на плоскости (δ, a) . Уравнения (17.5, 17.6) обладают симметрией: $a \rightarrow -a$, $\delta \rightarrow \delta + \pi$. Поэтому достаточно рассмотреть фазовый портрет только в интервале $-\pi/2 < \delta < \pi/2$. В этом интервале особые точки лежат на линии $\delta = 0$. При этом из второго уравнения (17.6) для особых точек следуют возможные значения a_0 , удовлетворяющие уравнению (17.3). Т.е. особые точки соответствуют частным одночасотным решениям системы. При значении $\omega = \omega_*$ бифуркационным образом возникают две новые особые точки. Линеаризуем систему (17.5, 17.6) вблизи особых точек: $\delta \ll 1$ и $a = a_0 + \mu$ с $\mu \ll 1$. Получаем систему линейных уравнений:

$$\dot{\mu} = f \delta, \quad \dot{\delta} = -(2\varepsilon a_0 + f/a_0^2)\mu. \quad (17.8)$$

Заметим, что из (17.13) следует, что $d\omega/da = 2\varepsilon a^2 + f/a^2$. Поэтому систему уравнений (17.8) можно переписать в виде

$$\ddot{\mu} + f \frac{d\omega}{da} \mu = 0. \quad (17.9)$$

Следовательно, при $d\omega/da > 0$ динамика вблизи особых точек представляет собой малые колебания и особая точка имеет характер центра,

При $d\omega/da < 0$ особая точка является неустойчивым седлом. Поэтому решения 1 и 3 на Рис.17.2b устойчивы, а решение 2 – неустойчиво, что и отражено на Рис.17.2a. Фазовые портреты системы при $\omega < \omega_*$, $\omega = \omega_*$ и $\omega > \omega_*$ приведены на Рис.17.3.

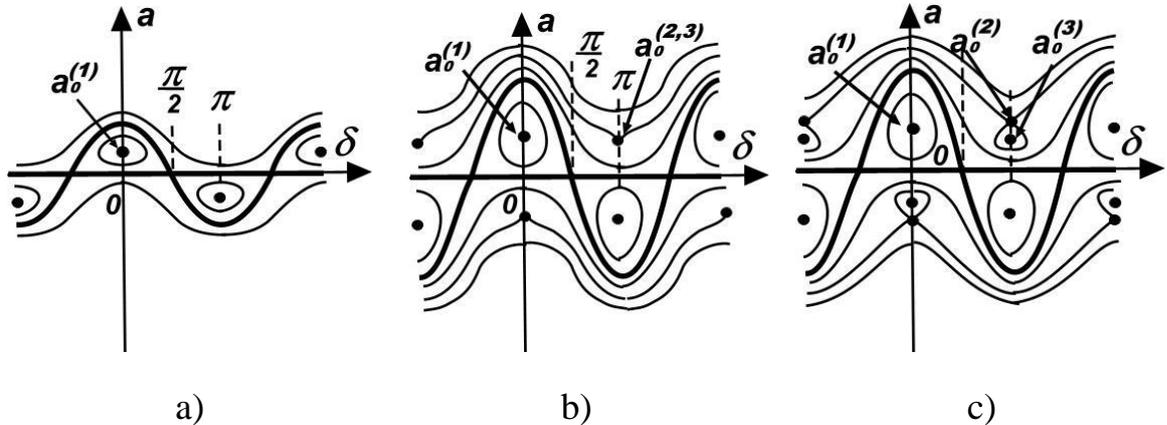


Рис.17.3

Рассмотрим подробнее решение рбщего вида вблизи особой точки $a_0^{(1)}$. Из (17.8, 17.9) имеем

$$a \approx a_0 + \mu_0 \sin \Omega t, \quad \delta = (\mu_0 \Omega / f) \cos \Omega t, \quad \Omega^2 = f(2\epsilon a_0^2 + f/a_0^2). \quad (17.10)$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\psi \approx (a_0 + \mu_0 \sin \Omega t) \exp(-i\omega t + i\mu_0 \Omega / f \cos \Omega t) \quad (17.11)$$

и является двухчастотным. Но это не есть наложение частного решения с частотой вынуждающей силы и общего решения с собственной частотой, как в случае линейного резонанса. Теперь дополнительная к вынуждающей частоте аоявляется частота, зависящая от амплитуды и частоты накачки и от собственной частоты. Кроме того, две частоты входят сложным образом.

Учет диссипации.

Рассмотрим влияние трения на явление нелинейного резонанса. Ограничимся исследованием вопроса в простой модели для комплексной величины (17.3). Как было показано в Лекции №13 учет диссипации заключается в замене собственной частоты ω_0 на $\omega_0 \rightarrow \omega_0 - i\lambda$. При этом уравнение (17.3) преобразуется к виду

$$i\dot{\psi} - (\omega_0 - i\lambda)\psi - \epsilon|\psi|^2\psi + f \exp(-i\omega t) = 0. \quad (17.12)$$

Ограничимся рассмотрением стационарных состояний –одночастотных решений на частоте вынуждающей силы. При замене $\psi = a \exp(-i\omega t + i\delta)$ уравнение (17.6) не меняется, а уравнения (17.5) заменяется на

$$\dot{a} = f \sin \delta + \lambda a. \quad (17.13)$$

Для стационарных состояний временные производные зануляются, и из полученных соотношений получается:

$$a^2 \left((\omega - \omega_0 - \varepsilon a^2)^2 + \lambda^2 \right) = f^2, \quad (17.14)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\lambda}{\omega - \omega_0 - \varepsilon a^2}. \quad (17.15)$$

Первое из этих соотношений можно переписать в виде

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon a^2 \pm \sqrt{f^2/a^2 - \lambda^2}. \quad (17.16)$$

Из этой записи видно, что решение существует только при $a < a_m = f/\lambda$. Полученное выражение для максимальной амплитуды колебания совпадает с результатом (11.13) в случае линейного резонанса с затуханием. Построение зависимости (17.16) позволяет найти резонансную кривую – Рис.17.4.

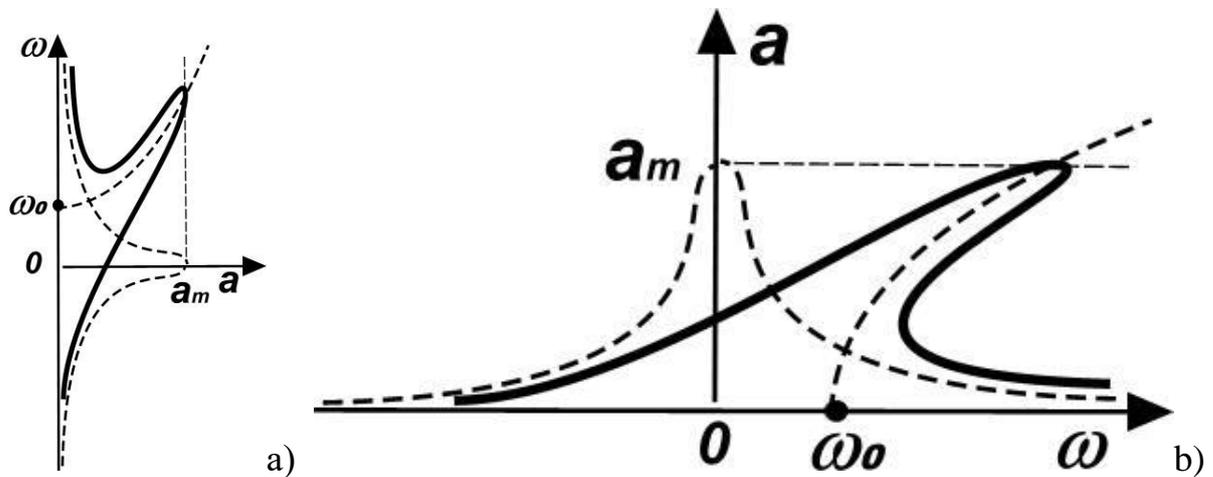


Рис.17.4

На Рис.17.4 приведены вклады в частоту двух слагаемых в (17.16). При слабом затухании резонансная кривая приобретает вид Рис.17.2а. Но трехзначный вид зависимости $a = a(\omega)$ имеет место только ачиная с определенной критической величины амплитуды внешнего поля. Трансформация резонансной кривой с изменением амплитуды поля представлена на Рис.17.5.

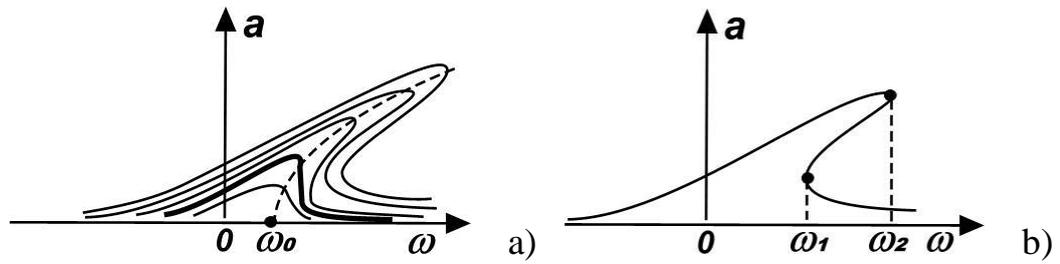


Рис.17.5

На рисунке выделена зависимость при критической амплитуде внешнего поля, при которой возникает трехзначная зависимость. Найдём ее. При этом значении амплитуды силы f_* две точки с вертикальными производными должны совпасть. В этих точках $d\omega/da = 0$. Подифференцировав (17.14) по a^2 и положив $d\omega/da^2 = 0$, получим

$$(\omega - \omega_0 - \varepsilon a^2)^2 - 2\varepsilon a^2(\omega - \omega_0 - \varepsilon a^2) + \lambda^2 = 0, \quad (17.17)$$

и, решив квадратное уравнение –

$$(\omega - \omega_0 - \varepsilon a^2) = \varepsilon a^2 \pm \sqrt{\varepsilon^2 a^4 - \lambda^2}. \quad (17.18)$$

В критической точке два корня совпадают, т.е. $a^2 = \lambda/\varepsilon$ и $\omega = \omega_0 + 2\varepsilon a^2 = \omega_0 + 2\lambda$. При этом из (17.14) следует значение $f_*^2 = 2\lambda^3/\varepsilon$.